suites arithmétiques et géométriques

Notations :

- $u(n) = u_n$
- $r =$ raison
- définition par récurrence : $u(n+1) = f(u(n))$

1. Suites arithmétiques

$$\begin{aligned} u(n+1) &= u(n) + r \\ u(0) &= u_0 \\ u(1) &= u_0 + r \\ u(2) &= u_0 + 2 \times r \\ ... &= ... \\ u(n) &= u_0 + n \times r \end{aligned}$$

exercice :

u_n est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 7$ et de raison $r = 3$.
Donner l'expression de u_n pour $n \geq 1 \in \mathbb{N}$?

2. Suites géométriques

$$\begin{aligned} u(n+1) &= u(n) \times r \\ u(0) &= u_0 \\ u(1) &= u_0 \times r \\ u(2) &= u_0 \times r^2 \\ ... &= ... \\ u(n) &= u_0 \times r^n \end{aligned}$$

exercice :

Un capital de 1000 euros est investi le 1er janvier 1996.
Il a un rendement de 10% par an.
Ces intérêts sont ajoutés au capital chaque année.
Questions :
Le capital obéït-il à une suite arithmétique ou géométrique ?
Quelle en est la raison ?
Calculer la valeur du capital au 1er janvier 2007 ?

3. Séries arithmétiques

Une série arithmétique V_n est la somme des premiers termes de la suite arithmétique.
exemple simple ($u_0 = 0, r = 1$) :

$$V_n = \sum_{i=1}^{i=n} i$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
V_n & = & 1 & + & 2 & + & ... & (n-1) & + & n \\
V_n & = & n & + & (n-1) & + & ... & 2 & + & 1 \\
\hline
2V_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & ... & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
2V_n &= n(n+1) \\
V_n &= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Cas général :

$$V_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = \sum_{i=0}^{i=n} (u_0 + ir)$$

$$\begin{array}{cccccccc}
V_n & = & u_0 & + & u_0 + r & + & u_0 + 2r & ... & u_0 + nr \\
V_n & = & u_0 + nr & + & u_0 + (n-1)r & + & u_0 + (n-2)r & ... & u_0 \\
\hline
2V_n & = & 2u_0 + nr & + & 2u_0 + nr & + & 2u_0 + nr & ... & 2u_0 + nr
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
2V_n &= (n+1)(2u_0 + nr) \\
V_n &= (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

4. Séries géométriques

Une série géometrique V_n est la somme des premiers termes de la suite géométrique.

$$V_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = \sum_{i=0}^{i=n} u_0 r^i$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
V_n & = & u_0 & + & u_0 r & + & u_0 r^2 & ... & u_0 r^{n-1} & + & u_0 r^n \\
rV_n & = & u_0 r & + & u_0 r^2 & + & u_0 r^3 & ... & u_0 r^n & + & u_0 r^{n+1} \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
rV_n - V_n &= u_0 r^{n+1} - u_0 \\
(r-1)V_n &= u_0 (r^{n+1} - 1) \\
V_n &= u_0 \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}
\end{aligned}$$