Equations du second degré

1. Forme générale

$ax^2 + bx + c = 0$
exemples :
$x^2 = 0$
$x^2 - 4 = 0$
$(x+1)^2 - 4 = 0$
$x^2 + 2x - 3 = 0$
$(x+2)(x-3) = 0$

2. Résoudre une équation

Trouver les valeurs particulières de x qui satisfont l'égalité.
La fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ prend différentes valeurs et ne s'annule que pour 2, ou 1, ou aucune valeurs de x. On appelle ces valeurs les racines de l'équation.

Les identités remarquables vont servir :
$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

3. Méthode de résolution

Factoriser le polynôme du second degré
Soit : mettre $ax^2 + bx + c = 0$ sous la forme $(x - x_1)(x - x_2) = 0$
Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit que l'un des termes soit nul.
$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Rightarrow x = x_1$ ou $x = x_2$

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$
d'où 2 solutions : $x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$ soient les racines : $x = 2$ et $x = -2$
que l'on écrit encore : $x = \pm 2$

$x^2 - 5 = 0$: 5 n'est pas un carré parfait, mais c'est quand même le carré de $\sqrt{5}$.
d'où, comme ci-dessus en remplaçant 2 par $\sqrt{5}$: $x = \pm\sqrt{5}$

$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$(x+1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1-2)(x+1+2) = 0$
Soit : $(x-1)(x+3) = 0$ qui a pour racines $x = 1$ et $x = -3$.

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$
L'astuce consiste à ajouter 1 aux 2 premiers termes et retrancher 1 au dernier terme pour faire un carré à partir des 2 premiers termes.
$(x^2 + 2x + 1) - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 4 = 0$
équation déjà résolue ci-dessus.

4. CAS GÉNÉRAL

$ax^2 + bx + c = 0$

Comme $a \neq 0$, on peut diviser les 2 membres de l'égalité par a :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Que l'on va mettre sous la forme : $(x+\alpha)^2 - \beta^2 = 0$.
et l'on obtiendra les solutions suivantes : $(x+\alpha+\beta)(x+\alpha-\beta) = 0$.
Soit les 2 racines : $x = -\alpha - \beta$ et $x = -\alpha + \beta$.

En développant : $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0$
Les termes en x^2 sont identiques.
En égalant les coefficients des termes en x, on trouve :

$$2\alpha = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \alpha = \frac{b}{2a}$$

En égalant les termes constants :

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{c}{a}$$

on trouve :

$$\beta^2 = \alpha^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Si $b^2 - 4ac > 0$, on peut prendre la racine de β :

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$4a^2$ est le carré de $2a$, au signe près, mais comme il y a déjà $\pm$, le signe n'a pas d'importance.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$