1. Equations de Maxwell (locales)

Elles sont au nombre de 4 qui relient :
- Le champ électrique E
- Le champ magnétique B
- La densité de charge ρ
- La densité de courant $j = \rho v$

Elles supposent que l'espace et le temps sont continus et qu'il n'y a pas de charges ponctuelles : $q = \int_V \rho dV$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

(La divergence de E est égale à la densité de charge)

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{2}$$

(La divergence de B est nulle : il n'y a pas de charge magnétique)

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{3}$$

(Le rotationnel de E et la variation de B se compensent)

$$c^2 \nabla \times B = \frac{j}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t} \tag{4}$$

(Le rotationnel de B est égal à la densité de courant : formée par les charges qui se déplacent "j" et le courant de déplacement du vide $\partial E/\partial t$)

On peut ranger les membres de droite dans le tableau suivant :

	E	$c^2 B$
(divergence) $\nabla\cdot$	ρ/ϵ_0	0
(rotationnel) $\nabla\times$	$-\partial B/\partial t$	$j/\epsilon_0 + \partial E/\partial t$

Conservation du courant : En prenant la divergence de l'équation (4), on élimine le rotationnel de B :

$$0 = \frac{\nabla \cdot j}{\epsilon_0} + \frac{\partial \nabla \cdot E}{\partial t}$$

Puis en remplaçant $\nabla \cdot E$ par ρ/ϵ_0 de l'équation (1)

$$\frac{\nabla \cdot j}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Qui traduit la conservation de la charge électrique : Le flux de courant sortant d'une surface est égal à la diminution de la charge à l'intérieur de la surface :

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{5}$$

2. Formulation globale ou intégrale

(1) Le flux de E à travers une surface fermée S est égale à la charge contenue dans le volume V intérieur à la surface :

$$\oint_S E\ dS = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\ dV$$

(2) Le flux de B à travers une surface fermée est nul : B est conservatif.

$$\oint_S B\ dS = 0$$

(3) La circulation de E autour d'une courbe fermée C est égale à l'opposé de la variation du flux de B à travers une surface S s'appuyant sur la courbe C.

$$\oint_C E\ dS = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t}\ dS$$

(4) La circulation de B autour d'une courbe fermée C est égale au flux du courant de charge (intensité électrique I) et du courant de déplacement ($\partial E/\partial t$) à travers une surface S s'appuyant sur la courbe C.

$$c^2 \oint_C B\ dS = \int_S (\frac{j}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t})\ dS = \frac{I(S)}{\epsilon_0} + \int_S \frac{\partial E}{\partial t}\ dS$$

3. Calcul de champs statiques simples

Les formulations intégrales permettent de calculer facilement les champs dans des configurations symétriques.

- Champ électrique créé par une plaque plane chargée de densité surfacique de charge σ :

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow \qquad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

- Champ électrique créé par un fil chargé de densité linéique de charge λ :

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

- Champ électrique créé par une charge ponctuelle q :

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \qquad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- Champ magnétique créé par un fil parcouru par une intensité I :

$$2\pi r B = \frac{I}{\epsilon_0 c^2} \Rightarrow \qquad B = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

4. Rappels mathématiques

A propos des champs vectoriels (E et B) :

- D'après le théorème de Helmholtz-Hodge, un champ vectoriel V raisonnable (de classe C^1 ...) est décomposable en une partie divergente ($-\nabla\phi$) et une partie rotationnelle ($\nabla \times A$) :

$$V = -\nabla\phi + \nabla \times A \tag{6}$$

(La décomposition n'est pas unique : on peut ajouter un gradient à A)

- Le rotationnel d'un gradient est nul : $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$
- Le gradient d'un rotationnel est nul : $\nabla \cdot (\nabla \times V) = 0$
- Le rotationnel d'un rotationnel est égal au gradient de la divergence moins le Laplacien : $\nabla \times \nabla \times V = \nabla \cdot (\nabla \cdot V) - \nabla^2 V$

5. Potentiels du champ électromagnétique

L'équation (2) signifie que B est purement rotationnel : il existe un potentiel vecteur A tel que :

$$B = \nabla \times A \tag{7}$$

En remplaçant B ainsi trouvé dans l'équation (3) on obtient :

$$\nabla \times (E + \frac{\partial A}{\partial t}) = 0$$

$E + \partial A/\partial t$ est donc purement divergent : il existe un potentiel scalaire ϕ tel que : $E + \partial A/\partial t = -\nabla\phi$

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \tag{8}$$

Le problème est ainsi passé de 6 inconnues (les 3 composantes des 2 vecteurs E et B) à 4 inconnues : le quadri-vecteur potentiel (ϕ, A).

6. Equations de Maxwell en potentiels

En substituant E et B exprimés en fonctions des potentiels, nous obtenons les 2 équations suivantes :

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial(\nabla \cdot A)}{\partial t} = \rho/\epsilon_0$$

$$c^2\nabla \times (\nabla \times A) = \frac{j}{\epsilon_0} - \nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

En remplaçant $\nabla \times (\nabla\times)$ par son expression donnée par l'équation (5) on obtient :

$$c^2\nabla(\nabla \cdot A) - c^2\nabla^2 A = \frac{j}{\epsilon_0} - \nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

Afin de simplifier la dernière équation, on peut utiliser la liberté que l'on a dans le choix du potentiel vecteur pour imposer la relation :

$$c^2\nabla \cdot A + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

On obtient alors : $c^2\nabla(\nabla \cdot A) + \nabla\partial\phi/\partial t = 0$ qui élimine 2 termes de l'équation et la réduit à : $-c^2\nabla^2 A = j/\epsilon_0 - \partial^2 A/\partial t^2$

Soit :

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{j}{\epsilon_0 c^2} \tag{10}$$

De même, si on utilise la relation imposée entre les potentiels ϕ et A, l'équation obtenue à partir de (3) devient : $-\nabla^2\phi + (1/c^2)\partial^2\phi/\partial t^2 = \rho/\epsilon_0$

En changeant le signe :

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{11}$$

Ces 2 équations dans le vide ont leur second membre nul : leur solution est la propagation d'une onde à la vitesse de la lumière "c" :

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

L'opérateur Laplacien (∇^2) étant scalaire, il permute avec la divergence et le rotationnel. On obtient donc la même équation de propagation dans le vide pour E et B.

La solution plane pour cette équation est :

$$\phi(r,t) = f(u \cdot r - c\,t) + g(u \cdot r + c\,t)$$

où f et g sont des fonctions quelconques dont les formes $f(r)$ et $g(r)$ au temps $t = 0$ se propagent aux vitesses $+c$ et $-c$ selon la direction u.

La solution sphérique pour cette équation est :

$$\phi(r,t) = \frac{f(r - c\,t)}{r} + \frac{g(r + c\,t)}{r}$$

où $f(t)$ en $r = 0$ se propage radialement en s'éloignant de l'origine, et $g(t)$ en $r = 0$ se propage radialement en convergeant vers l'origine.